ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО ФИЗИКА 2022
11 февруари 2022
IV година
Решенија на задачите

Задача 1. Хомогена метална топка со радиус $r = 20\,\mathrm{cm}$ и маса $m = 40\ \mathrm{kg}$ ротира со константна аголна брзина $\omega = 2\ \mathrm{rad/s}$ околу оска:
а) која поминува низ центарот на маса на топката;
б) која се наоѓа на растојание $d = 2r$ во однос на оската од условот а).
Да се пресмета кинетичката енергија на оваа топка за двете различни оски на ротација.

Решение:

Кинетичката енергија на ротационо движење се пресметува со следната релација:

$$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

каде што I е моментот на инерција околу зададената оска, а ω е аголната брзина. Знаејќи ја аголната брзина останува да се пресметаат моментите на инерција во двата случаја.
а) Моментот на инерција за хомогена топка кога оската поминува низ центарот на маса е:

$$I_1 = \frac{2}{5} mr^2 = \frac{2}{5}\cdot 40 \cdot \left(20\cdot 10^{-2}\right)^2\ \mathrm{kg\ m^2} = 0,64\ \mathrm{kg\ m^2}.$$

Ако ја внесеме оваа вредност во погорната релацијата за кинетичката енергија се добива:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_1\omega^2 = \frac{1}{2} 0,64 \cdot 4 \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{s^2} = 1,28\ \mathrm{J}.$$

б) Во овој случај моментот на инерција се пресметува преку Штајнеровата теорема (теорема на паралелни оски):

$$I_2 = I_{cm} + m\,h^2.$$

Во оваа теорема $I_{cm} \equiv I_1$ е моментот на инерција во однос на оска која поминува низ центарот на маса. Истиот веќе го најдовме во делот под **а)**, додека пак $h = 2r$ е растојанието помеѓу двете оски. Затоа:

$$I_2 = \frac{2}{5} mr^2 + m\cdot 4r^2 = \frac{22}{5} mr^2 = 7,04\ \mathrm{kg\ m^2},$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_2\omega^2 = \frac{1}{2} 7,04 \cdot 4 \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{s^2} = 14,08\ \mathrm{J}.$$

Забелешка: деловите под **а)** и **б)** носат еднаков број поени, односно по 10. Доколку има грешка само во пресметките на конечните резултати се одземаат најмногу 4 поени. За незапишана единица мерка се одзема по еден поен.

Задача 2. Кружна платформа со радиус $R = 3$ m може да ротира без триење околу својата геометриска оска O. На платформата е обележан круг, со радиус $r = 2$ m, по којшто се движи човек со константна брзина $v = 5{,}5$ m/s во однос на Земјата. Ако масата на платформата и човекот се $M = 250$ kg и $m = 85$ kg, соодветно, со колкава аголна брзина $\omega_2^{'}$ ќе се движи платформата, ако на почетокот од движењето таа и човекот биле во мирување, односно $\omega_1 = \omega_2 = 0$? За човекот да се искористат следниве две апроксимации:

а) човекот да се разгледува како материјална точка;

б) човекот да се разгледува како цилиндар со радиус $r_0 = 16$ cm, чијашто главна оска се движи по обележаниот круг со радиус $r = 2$ m.

Решение:

За решавање на оваа задача ќе го искористиме законот за запазување на моментот на импулсот, којшто важи при ротација на изолирани системи, во случајов на системот платформа-човек, околу дадена оска. Овој систем е изолиран, бидејќи на него не дејствуваат надворешни сили, па затоа вкупниот момент на импулс на почетокот $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$, треба да е еднаков со вкупниот момент на импулсот при ротација $\vec{L}_1^{'} + \vec{L}_2^{'}$, каде што индексите 1 и 2 се за човекот и платформата, соодветно. Според условот на задачата, на почетокот системот е во мирување $(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{0})$, односно

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1^{'} + \vec{L}_2^{'} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{L}_1^{'} = -\vec{L}_2^{'}.$$

Спротивните знаци на векторите на моментите на импулсот укажуваат дека човекот и платформата ќе ротираат во спротивни насоки. Со изедначување на големините на моментите на импулсите, се добива релацијата за аголната брзина на платформата:

$$\left|\vec{L}_1^{'}\right| = \left|\vec{L}_2^{'}\right| \;\Rightarrow\; \mathrm{I}_1\omega_1^{'} = \mathrm{I}_2\omega_2^{'} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega_2^{'} = \frac{I_1}{I_2}\omega_1^{'} = \frac{I_1}{I_2}\frac{v}{r}.$$

Во последната релација искористено е дека аголната брзина на човекот при ротацијата е еднаква на $\omega_1^{'} = \dfrac{v}{r}$, кадешто v е линиската брзина на движење на човекот долж круг со радиус r. Моментот на инерција на платформата е ист во двата случаја и изнесува:

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}250 \cdot 9 \text{ kg m}^2 = 1125 \text{ kg m}^2.$$

Следно, ќе го пресметаме моментот на инерција на човекот за двете различни апроксимации и ќе ја пресметаме аголната брзина на платформата.

а) При апроксимација со материјална точка, моментот на инерција на човекот е:

$$I_1 = mr^2 = 85 \cdot 4 \text{ kg m}^2 = 340 \text{ kg m}^2.$$

Ако ги искористиме овие вредности во претходната релација за аголната брзина на платформата добиваме :

$$\omega_2^{'} = 0{,}831\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

б) Апроксимацијата на човекот со цилиндар е пореалистична во споредба со претходниот случај, но поради големата оддалеченост на човекот од оската на ротација во споредба со неговиот радиус, корекцијата во моментот на инерција е помала од 1%:

$$I_1 = \frac{1}{2} m r_0^{\,2} + m r^2 = 85 \cdot \left(\frac{1}{2} 16^2 \cdot 10^{-4} + 4\right) \text{ kg m}^2 = 341{,}088 \text{ kg m}^2 .$$

Користејќи го коригираниот момент на инерција за аголната брзина на платформата се добива:

$$\omega_2^{'} = 0{,}834 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Добиениот резултат само потврдува дека во случај кога растојанието помеѓу дадено тело и оската околу којашто тоа ротира е многу поголемо од димензиите на самото тело, апроксимирањето на телото со материјална точка е сосема оправдано.

Забелешка: деловите под а) и б) носат еднаков број поени, односно по 10. Доколку има грешка само во пресметките на конечните резултати се одземаат најмногу 4 поени. За незапишана единица мерка се одзема по еден поен. Доколку ученикот на почетокот го постави законот за запазување на моментот на импулсот во скаларна форма, земајќи ги двата момента со знак плус и добие негативен знак за аголната брзина, којшто укажува на спротивната насока на ротација на човекот и платформата, да не се одземаат поени. Ако ученикот го пресмета моментот на инерција на платформата, без да го запише законот за запазување на моментот на импулсот, се доделуваат 4 поени. Ако ученикот го пресмета и моментот на инерција на човекот се доделуваат по 3 поени за секој од двата случаи.

Задача 3. Набљудувач O се наоѓа на платформа од вселенска станица со должина $D_0 = 65\ \text{m}$, а вселенско летало се движи со брзина $v = 0,8c$ паралелно на платформата , каде што c е брзината на светлината. Ако набљудувачот O забележи дека должината на вселенското летало е иста со таа на платформата:

а) Колкава е должината во мирување на леталото L_0?

б) Колкава е должината на платформата D за набљудувач O', којшто се наоѓа во леталото?

в) Според набљудувачот O', колку време му е потребно на набљудувачот O за да ја помине целата должина на леталото?

За брзината на светлината да се земе $c \approx 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$.

Решение:

а) Должината на вселенскиот брод измерена од страна на O, $L = D_0 = 65\ \text{m}$, е помала во однос на неговата сопствена должина и може да се добие со помош на Лоренцовата релација:

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{65\ \text{m}}{\sqrt{1-0,8^2}} = 108,3\ \text{m}.$$

б) Слично на претходниот случај, за набљудувач кој се наоѓа во вселенскиот брод, платформата се движи со истата брзина, но во спротивна насока $-v$, и за него платформата D е помала во споредба со нејзината должина на мирување D_0. D може да се пресмета преку релацијата за контракција на должината кај објекти кои се во движење:

$$D = D_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 65\sqrt{1-0,8^2}\ \text{m} = 39\ \text{m}.$$

в) За O' должината на леталото е неговата должина на мирување $L_0 = 108,3\ \text{m}$. Затоа, според него, на набљудувачот O, којшто се движи со брзина v, му се потребни

$$\Delta t' = \frac{108,3\ \text{m}}{0,8c} = \frac{108,3\ \text{m}}{0,8 \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 4,5 \cdot 10^{-7}\text{s} = 0,45\ \mu\text{s},$$

за да ја помине целата должина на вселенското летало.

Забелешка: деловите под **а)** и **б)** носат по 7 поени, а делот под **в)** 6 поени. Доколку има грешка само во пресметките на конечните резултати се одземаат најмногу 4 поени. За незапишана единица мерка се одзема по еден поен.

Задача 4. Да се пресмета неопределеноста на импулсот за:

а) тениско топче кое се наоѓа во заградено игралиште со должина $L = 35$ m;

б) електрон во основното енергетско ниво на атомот на водород. За радиусот на првата Борова орбита да се земе $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m.

в) Со споредба на добиените резултати да се даде коментар за важноста на принципот на неопределеност во секојдневието.

За Планковата константа да се искористи $h = 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$.

Решение:

Неопределеноста на импулсот се определува преку Хајзенберговата релација на неопределеност:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \;\Rightarrow\; \Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{h}{2\pi\ \Delta x}.$$

а) Во условот не е дадена точната положба на топчето, па за неопределеноста на положбата ќе ја искористиме должината на игралиштето $\Delta x_t = L_t = 35$ m:

$$\Delta p_t \geq \frac{\hbar}{\Delta x_t} = \frac{h}{2\pi\ \Delta x_t} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi \cdot 35\ \mathrm{m}} = \frac{0,19 \cdot 10^{-34}}{2\pi} \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}} = 3 \cdot 10^{-36} \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}.$$

б) Неопределеноста на положбата на електронот ќе сметаме дека е еднаква со дијаметарот на водородниот атом во основната состојба $\Delta x_e = 2a_0 = 2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10}$ m:

$$\Delta p_e \geq \frac{\hbar}{\Delta x_e} = \frac{h}{2\pi\ \Delta x_e} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{2\pi \cdot 2\ \cdot 0,529 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}} = \frac{6,26 \cdot 10^{-24}}{2\pi} \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}} = 1 \cdot 10^{-24} \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}.$$

в) Неопределеноста на импулсот на топчето е десет реда на големина помала во споредба со таа на електронот. Дополнително, за тениско топче со маса од $m_t \approx 5 \cdot 10^{-2}$ kg и електрон со маса $m_e \approx 10^{-30}$ kg, неопределеност во нивните брзини би била $\Delta v_t \geq 6 \cdot 10^{-35} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $\Delta v_e \geq 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ соодветно. Од оваа анализа може да заклучиме дека неопределеноста во брзината на топчето, а со тоа и Хајзенберговиот принцип на неопределеност, се занемарливи во класична ситуација, но имаат значајна улога во квантниот свет, каде што неопределеноста во брзината на електронот е од ист ред на големина со неговата брзина кога се наоѓа во основното енергетско ниво на водород.

Забелешка: деловите под **а)** и **б)** носат по 8 поени, односно ако ученикот точно пресметал, но не дал коментар за важноста на Хајзенберговиот принцип на неопределеност (делот под **в)**) добива вкупно 16 поени. Доколку ученикот искористил $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$, $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$ или пак во делот под **б)**, за неопределеноста на положбата зел дека е еднаква на радиусот на првата Борова орбита, наместо на дијаметарот, да не се одземаат поени. Доколку има грешка само во пресметките на конечните резултати се одземаат најмногу 4 поени. За незапишана единица мерка се одзема по еден поен. Доколку коментарот за важноста на Хајзенберговиот принцип е даден само квалитативно, без да биде направена и квантитативна споредба на резултатите, ученикот добива 2 поена за овој дел.

Задача 5. Електрон добиен при негативен β-распад на бизмут-210 има средна кинетичка енергија $E_k = 390\ \mathrm{keV}$.

а) Да се пресмета Де Брољиевата бранова должина на електронот.
б) Дали вака добиен електрон би биле корисен за експериментот на Девисон и Џермер?
За да се одговори на второто прашање, потребно е да се најде аголот, под којшто се добива максимум од прв ред при дифракција на електронот од монокристал на никел со константа на кристална решетка $d = 0,091\ \mathrm{nm}$. Масата на електронот е $m_e = 9,11\cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$, а елементарниот електричен полнеж изнесува $e = 1,602\cdot 10^{-19}\mathrm{C}$.

Решение:

а) Де Брољиевата бранова должина за честичка со кинетичка енергија E_k (вредноста на кинетичката енергија од условот на задачата дозволува да се користи класичната релација за кинетичката енергија) е:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{6,626\cdot 10^{-34}\mathrm{Js}}{\sqrt{2\cdot 9,11\cdot 10^{-31}\cdot 390\cdot 10^{3}\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}\ \dfrac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}}} = 1,964\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} = 1,964\,\mathrm{pm}.$$

б) Следно, користејќи ја Брег-Вулфовата релација за дифракција на рендгенски зраци од кристали:

$$m\lambda = 2d\sin\theta,$$

ќе го пресметаме аголот под кој се добива максимум од прв ред ($m=1$) при дифракција на електроните, добиени со негативниот бета распад, од монокристал на никел:

$$\theta = \arcsin\frac{\lambda}{2d} = 0,011\mathrm{rad} = 0,63^\circ.$$

Малиот агол под којшто се добива првиот максимум покажува дека вака добиените електрони не се практичен избор за спроведување на експериментот на Девисон и Џермер.

Забелешка: делот под **а)** носи 8 поени, а делот под **б)** 12 поени. Доколку има грешка само во пресметките на конечните резултати се одземаат најмногу 4 поени. За незапишана единица мерка се одзема по еден поен. Доколку во делот под **б),** ученикот го пресметал аголот на првиот максимум на дифракција, а не дал одговор на прашањето, се одземаат 4 поени. Доколку одговорот е погрешен, односно доколку ученикот тврди дека брановата должина на електроните е погодна за изведување на експериментот на Девисон и Џермер, се одземаат исто така 4 поени.